Les tours de Hanoï

Fabrice Colin, Julien Dompierre, Abdellatif Serghini

Département de mathématiques et d'informatique
Université Laurentienne

Sudbury, 29 avril 2010

Le problème des tours de Hanoï

- Il faut déplacer tous les disques d'un poteau à un autre.
- On ne peut déplacer qu'un disque à la fois.
- Il est interdit de mettre un disque plus grand sur un disque plus petit.

Solution par récurrence du problème des tours de Hanoï

On constate qu'il est possible de résoudre le problème des tours de Hanoï pour un disque.
Supposons qu'il soit possible de résoudre ce problème avec k disques. Si on a $k+1$ disques, alors

- On applique la solution pour k disques pour déplacer les k disques supérieurs sur un autre poteau et libérer le $k+1$-ème disque.
- On déplace le $k+1$-ème disque sur le troisième poteau libre.
- On applique de nouveau la solution pour k disques pour déplacer les k disques supérieurs sur le $k+1$-ème disque.

Donc, s'il y a une solution pour k disques, alors il y a aussi une solution pour $k+1$ disques. De plus, on n'a fait aucune hypothèse restrictive sur k. Donc, il y a une solution pour toute valeur de $k \geq 1$.

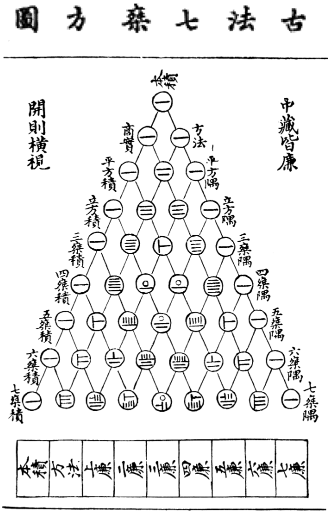
Note historique : Blaise Pascal

Né le 19 juin 1623 à Clermont-Ferrand, France.
Mort le 19 août 1662 à Paris.

`www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Pascal.html`

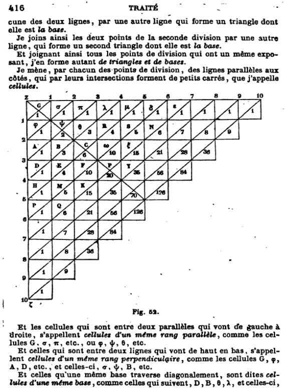
Origine du triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est déjà connu des mathématiciens persans, par exemple al-Karaji (953–1029) ou Omar Khayyam au XIe siècle qui l'utilisent pour développer $(a+b)^n$. Il apparaît en Chine dès 1261 dans un ouvrage de Yang Hui (au rang 6) et dans le *Miroir de jade des quatre éléments* de Zhu Shijie en 1303 (au rang 8). Yang Hui attribue la paternité du triangle au mathématicien chinois du XIe siècle Jia Xian. Ce triangle permettait de présenter les coefficients des différents termes dans la formule du binôme.



Origine du triangle de Pascal

En Europe, il apparaît dans l'ouvrage de Peter Apian, *Rechnung* (1527). Il est étudié par Michael Stifel (1486–1567) et Tartaglia (1499–1557). C'est d'ailleurs sous le nom de Triangle de Tartaglia qu'il est connu en Italie. Mais c'est Blaise Pascal qui lui consacre un traité : le *Traité du triangle arithmétique* (1654) démontrant 19 de ses propriétés, propriétés découlant en partie de la définition combinatoire des coefficients. Nombre de ces propriétés étaient déjà connues mais admises et non démontrées. Pour les démontrer, Pascal met en place dans son traité une version aboutie du **raisonnement par récurrence**. Il y démontre le lien entre le triangle et la formule du binôme.



416 TRAITÉ

cune des deux lignes, par une autre ligne qui forme un triangle dont elle est *la base*.

Je joins ainsi les deux points de la seconde division par une autre ligne, qui forme un second triangle dont elle est *la base*.

Et joignant ainsi tous les points de division qui ont un même exposant, j'en forme autant *de triangles et de bases*.

Je mène, par chacun des points de division, des lignes parallèles aux côtés, qui par leurs intersections forment de petits carrés, que j'appelle *cellules*.

Fig. 52.

Et les cellules qui sont entre deux parallèles qui vont de gauche à droite, s'appellent *cellules d'un même rang parallèle*, comme les cellules G, σ, π, etc., ou φ, ψ, θ, etc.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent *cellules d'un même rang perpendiculaire*, comme les cellules G, φ, A, D, etc., et celles-ci, σ, ψ, B, etc.

Et celles qu'une même base traverse diagonalement, sont dites *cellules d'une même base*, comme celles qui suivent, D, B, θ, λ, et celles-ci,

La légende des tours de Hanoï

Sous le titre « Les brahmes tombent », Édouard Lucas relate que

> « *N. Claus de Siam a vu, dans ses voyages pour la publication des écrits de l'illustre Fer-Fer-Tam-Tam, dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles, Dieu enfila au commencement des siècles, 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée du Brahmâ. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille sur la troisième, sans s'écarter des règles fixes que nous venons d'indiquer, et qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin des mondes !* »

Combien de mouvements faut-il pour résoudre le problème avec n disques ?

Nombre de disques	Nombre de mouvements
1	$H_1 = 1$
2	$H_2 = 3$
3	$H_3 = 7$
4	$H_4 = 15$
5	$H_5 = 31$
6	$H_6 = 63$
7	$H_7 = 127$
$\vdots$	$\vdots$
n	H_n ?

où H_n est le nombre de mouvements nécessaires pour résoudre le problème des tours de Hanoï avec n disques.

Combien de mouvements faut-il pour résoudre le problème avec n disques ?

Nombre de disques	Nombre de mouvements
1	$H_1 = 1$
2	$H_2 = 3$
3	$H_3 = 7$
4	$H_4 = 15$
5	$H_5 = 31$
6	$H_6 = 63$
7	$H_7 = 127$
$\vdots$	$\vdots$
n	$H_n = 2^n - 1$

Il faut $H_n = 2^n - 1$ mouvements pour résoudre le problème des tours de Hanoï avec n disques. **Pourquoi ?**

Combien de mouvements faut-il pour résoudre le problème avec n disques ?

Nombre de disques	Nombre de mouvements
1	$H_1 = 1$
2	$H_2 = 3 = 1 + 1 + 1 = H_1 + 1 + H_1$
3	$H_3 = 7 = 3 + 1 + 3 = H_2 + 1 + H_2$
4	$H_4 = 15 = 7 + 1 + 7 = H_3 + 1 + H_3$
5	$H_5 = 31 = 15 + 1 + 15 = H_4 + 1 + H_4$
6	$H_6 = 63 = 31 + 1 + 31 = H_5 + 1 + H_5$
7	$H_7 = 127 = 63 + 1 + 63 = H_6 + 1 + H_6$
$\vdots$	$\vdots$
n	$H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1$

Formule de récurrence

On a donc que $H_1 = 1$, c'est-à-dire qu'il faut 1 mouvement pour résoudre le problème avec 1 disque, et il faut $H_n = 2H_{n-1} + 1$ mouvements, avec $n > 1$, pour résoudre le problème avec n disques.

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2 + 1
\end{aligned}$$

Solution de la formule de récurrence

On a donc que $H_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$. On a donc que $2H_n$ est donné par

$$\begin{aligned} 2H_n &= 2(2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2 + 1) \\ &= \quad 2^n \; + \; 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^3 + 2^2 + 2. \end{aligned}$$

En soustrayant H_n de $2H_n$, la plupart des termes s'annulent, sauf le premier et le dernier :

$$\begin{aligned} 2H_n - H_n &= 2^n + \cancel{2}^{n-1} + \cancel{2}^{n-2} + \cancel{2}^{n-3} + \cdots + \cancel{2}^3 + \cancel{2}^2 + \cancel{2} \\ &\qquad - \cancel{2}^{n-1} - \cancel{2}^{n-2} - \cancel{2}^{n-3} - \cdots - \cancel{2}^3 - \cancel{2}^2 - \cancel{2} - 1 \\ H_n &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Nombre de mouvements pour déplacer 64 disques

Un jeu à 64 disques requiert un minimum de $2^{64} - 1$ déplacements, c'est-à-dire $18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ déplacements.

Admettons qu'il faille 1 seconde pour déplacer un disque, cela fait $60 \times 60 \times 24 = 86\,400$ déplacements par jour.

La fin du jeu aurait lieu au bout de $18\,446\,744\,073\,709\,551\,615/86\,400 = 213\,503\,982\,200\,000$ jours.

Cela équivaut à peu près à $213\,503\,982\,200\,000/365.25 = 584\,542\,045\,700$ années, soit environ 43 fois l'âge estimé de l'univers (13,7 milliards d'années).

Édouard Lucas

François Édouard Anatole Lucas (4 avril 1842 – 3 octobre 1891) est un mathématicien français. Il publia plusieurs livres sur les mathématiques et les quatre fameux tomes des *récréations mathématiques*. Le problème mathématique des tours de Hanoï a été inventé par Édouard Lucas. Il est publié dans le tome 3 de ses *Récréations mathématiques*, parues à titre posthume en 1892.

Un algorithme itératif pour le problème des tours de Hanoï

Il existe également une procédure itérative pour résoudre le problème des tours de Hanoï. Elle consiste à effectuer successivement les deux déplacements suivants :

- déplacer le plus petit disque d'un emplacement à l'emplacement suivant (du premier vers le deuxième poteau, du deuxième vers le troisième poteau, ou du troisième vers le premier poteau) ;
- déplacer un autre disque ;

et à poursuivre itérativement ces deux déplacements jusqu'à ce que la tour complète soit déplacée, le dernier déplacement se limitant alors à celui du plus petit disque sur le sommet de la tour. L'action de déplacer un autre disque est non ambiguë puisque, en dehors du plus petit disque, un seul mouvement d'un autre disque est possible.